確率論的普及モデルによるブロードバンドサービス等契約数の分析(経済物理学とその周辺,統計数理研究所研究会共同研究集会,経済物理学2009-ミクロとマクロの架け橋-,京都大学基礎物理学研究所2009年度前期研究会,研究会報告)

AUTHOR(S):

鈴木, 尚通; 田中, 正敏; 葛西, 和広; 成, 耆政

確率論的普及モデルによるブロードバンドサービス等契約数の分析

鈴木尚通[1], 田中正敏, 葛西和広, 成 耆政
松本大学 総合経営学部

要旨：確率論的普及モデルを概説し，ブロードバンドサービス契約数，移動体通信契約数の解析を行う．

1 序

ビジネス会社によって作り出された新製品やサービスを含む多くの新しいアイデアが社会に広まっていく際に，その購買者または受容者にはいくつかのパターンがあると考えられている．例えば，普及過程の先進的な研究者である Rogers は，購買者 (または受容者) を 5 段階に分類している [1].

Bass は 1969 年に新製品の購買者を他の購買者とは独立に製品を採用する革新者と他の購買者に影響される採用する追従者の 2 グループに分類したモデルを提唱した [2]. Bass モデルは, p, q, M を非負の定数として, 次の微分方程式で表される;

$$\frac{dF(t)}{dt} = (M - F(t))(p + qF(t)/M), \quad F(0) = 0. \tag{1}$$

式 (1) において，$F(t)$ は時刻 t までの販売数を表す．M は市場の潜在力，すなわち最終的に該当製品が販売されるであろう総数を表す．係数 p は革新係数，q は追従係数と呼ばれている．

その後文献 [3] において，式 (1) の右辺を $f_1(t) = p(M - F(t))$ と $f_2(t) = q(M - F(t))F(t)/M$ の和に分解し，$f_1(t)$ を時刻 t における単位時間当たりの販売数に対する革新者の寄与，$f_2(t)$ を追従者の寄与としている．しかし，(1) より $df_1(t)/dt = -p\{f_1(t) + f_2(t)\}$ となり，関数 $f_1(t)$ の時間変化には追従者の寄与 $f_2(t)$ が含まれるので，一般的には，$f_1(t)$ は革新者に寄与であるとは言えない．

Kendall は，出生率と消滅率が時間の関数であるとして，一般化された出生消滅過程を定式化し [4]，その応用の 1 例として，確率過程から得られた平均個体数の時間変動の方程式が，Multhus-Verhulst 方程式 に帰着する場合があることを示した．我々は，移入過程を含む一般化された出生過程を用いて，革新者と追従者からなる消費者の購買行動に対する確率論的普及モデルを提唱した [5, 6]．ここではモデルの概略を説明した上で，ブロードバンドサービス契約数の分析を行った結果を報告したい．

2 一般化された移入のある出生過程モデル

$P(n,t)$ は n 個の個体が時刻 t $(t \geq 0)$ に存在する確率を表す．時刻 t から $t + \Delta t$ の時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ に, 移入によって個体数が 1 個増える確率は $\lambda_0(t)\Delta t$ で与えられ，出生過程によって個体数が 1 個増加する確率は $n\lambda_2(t)\Delta t$ で与えられるとする．$\Delta t \to 0$ の極限を取ると，確率分布の時間変化の方程式が得られる．その偏微分方程式と初期条件は，それぞれ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n,t)}{\partial t} &= \lambda_0(t)P(n-1,t) - \lambda_0(t)P(n,t) \\ &\quad +(n-1)\lambda_2(t)P(n-1,t) - n\lambda_2(t)P(n,t), \end{aligned} \tag{2}$$

$$P(n, t=0) = \delta_{n0}, \tag{3}$$

[1] e-mail address: suzuki@matsu.ac.jp

と表せる．ただし，$n<0$ のとき，$P(n,t)=0$ とする．

確率分布に対する母関数を

$$\Pi(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P(n;t)z^n. \tag{4}$$

で定義する．母関数に対する偏微分方程式とその初期条件は，それぞれ，

$$\frac{\partial\Pi(z,t)}{\partial t} = \lambda_0(t)(z-1)\Pi(z,t)+\lambda_2(t)z(z-1)\Pi(z,t), \tag{5}$$

$$\Pi(z,0) = \sum_{n=0}^{\infty}P(n,t_0)z^n=1, \tag{6}$$

で与えられる．(6) のもとに，(5) を解くと，母関数は，

$$\Pi(z,t) = \exp\left[\int_0^t d\tau\lambda_0(\tau)\frac{(z-1)(p(t,\tau)+1)}{1-(z-1)p(t,\tau)}\right], \tag{7}$$

$$p(t,\tau) = \exp[\int_\tau^t \lambda_2(t')dt']-1. \tag{8}$$

と表すことができる [5, 6]．確率分布 $P(n,t)$ $(n=0,1,\cdots)$ とファクトリアル・モーメント F_k $(k=1,2,\cdots)$ は母関数から，それぞれ，次の式で与えられる；

$$P(n,t) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n\Pi(z,t)}{\partial z^n}|_{z=0}, \tag{9}$$

$$F_k = \langle n(t)(n(t)-1)\cdots(n(t)-k+1)\rangle=\frac{\partial^k\Pi(z,t)}{\partial z^k}|_{z=1}. \tag{10}$$

3 確率過程に基づく普及モデル

一般化された移入のある出生過程を用いて，革新者と追従者からなる普及モデルを考える．

式 (10) から，時刻 t における平均個体数は，

$$\langle n(t)\rangle=\int_0^t d\tau\lambda_0(\tau)\exp[\int_\tau^t\lambda_2(t')dt'], \tag{11}$$

で与えられる．(11) を時間 t で微分すると，平均個体数に対する微分方程式，

$$\frac{d\langle n(t)\rangle}{dt}=\lambda_0(t)+\lambda_2(t)\langle n(t)\rangle, \quad \langle n(0)\rangle=0. \tag{12}$$

を得る [5, 6]．(1) と (12) を見比べると，次の対応関係があることがわかる；

$$F(t)\leftrightarrow\langle n(t)\rangle, \quad p(M-F(t))\leftrightarrow\lambda_0(t), \quad q(M-F(t))F(t)/M\leftrightarrow\lambda_2(t). \tag{13}$$

ここで，式 (12) の意味を考える．時刻 t における平均個体数 $\langle n(t)\rangle$ は，(13) からもわかるように，Bass モデルにおける時刻 t までの製品の販売数 $F(t)$ に対応し，ある商品が売り出されてから時刻 t までに販売された (平均) 個数を表すと考えられる．$d\langle n(t)\rangle/dt$ は，時刻 t において，単位時間当たりに販売されたその商品の (平均) 個数を表す．それは (12) の右辺で，$\lambda_0(t)$ と $\lambda_2(t)\langle n(t)\rangle$ の和に分解される．右辺第 1 項の移入率 $\lambda_0(t)$ は時間の関数ではあるが，時刻 t までの購買者数には依存しないので，移入率 $\lambda_0(t)$ は時刻 t における単位時間当たりの販売数に対する革新者の寄与を表すと考えられる．第 2 項の $\lambda_2(t)\langle n(t)\rangle$ は，時刻 t までの表品の販売個数 $\langle n(t)\rangle$ と出生率 $\lambda_2(t)$ に比例する．したがって，この項は時刻 t までの商品の売れ行きにつられて購買行動を起こす層，すなわち，追従者の寄与を表すと解釈できる．

3.1 修正 Bass モデル

(11) が解析的な関数で表される場合を考える．ξ を定数として，$\lambda_0(t) = \xi\lambda_2(t)$, が成り立つ場合は，(11) は積分できる．さらに a, r, μ を，$a > 0, r > 0, \mu \geq 1$ を満たす定数であるとして，

$$\lambda_2(t) = \frac{\lambda_0(t)}{\xi} = ar\mu\frac{t^{\mu-1}\mathrm{e}^{-rt^\mu}}{1 + a\mathrm{e}^{-rt^\mu}}, \tag{14}$$

とすると，(11) と (12) は，それぞれ，次のように表される；

$$\langle n(t)\rangle = a\xi\frac{1 - \mathrm{e}^{-rt^\mu}}{1 + a\mathrm{e}^{-rt^\mu}}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\langle n(t)\rangle = a(1+a)\xi r\mu\frac{t^{\mu-1}\mathrm{e}^{-rt^\mu}}{(1 + a\mathrm{e}^{-rt^\mu})^2}. \tag{16}$$

(16) は Bass モデル (1) よりも強い時間依存性を持っている．$\mu = 1$ とすると，(16) は実質的に Bass モデルに一致する．そこで，(15)，(16) を修正 Bass モデル (MBM) と呼ぶことにする [6].

3.2 確率論的普及モデル

移入率 $\lambda_0(t)$ と出生率 $\lambda_2(t)$ が，a_0, b_0, a_2, b_2 を非負定数, r_0, r_2, μ $(\mu \geq 1)$ を正定数として，

$$\lambda_0(t) = \frac{b_0 t^{\mu-1}\mathrm{e}^{-r_0 t^\mu}}{1 + a_0\mathrm{e}^{-r_0 t^\mu}}, \quad \lambda_2(t) = \frac{b_2 t^{\mu-1}\mathrm{e}^{-r_2 t^\mu}}{1 + a_2\mathrm{e}^{-r_2 t^\mu}}. \tag{17}$$

と表されるとする．(17) より，時刻 t までの販売数は次の式で与えられる；

$$\langle n(t)\rangle = \int_0^t d\tau\frac{b_0\tau^{\mu-1}\mathrm{e}^{-r_0\tau^\mu}}{1 + a_0\mathrm{e}^{-r_0\tau^\mu}}\left(\frac{1 + a_2\mathrm{e}^{-r_2\tau^\mu}}{1 + a_2\mathrm{e}^{-r_2 t^\mu}}\right)^\nu, \quad \nu = b_2/(a_2 r_2 \mu). \tag{18}$$

時刻 t における単位時間当たりの商品販売数は (12) で与えられる．(17), (18), (12) を確率論的普及モデル (SDM) と呼ぶことにする [6]．$a_0 = a_2 = a, r_0 = r_2 = r, \nu = 1 (b_2 = ar\mu)$ および $b_0/b_2 = \xi$ が成り立つとき，(18) は修正 Bass モデル (MBM)，(15)，に帰着する．(17) で定義される移入率と出生率は，$\mu > 1$ のときともにピークを持つので，係数の値によってはピークの位置がずれて，MBM よりもより幅の広い分布に対応しうる．

4 データ解析

修正 Bass モデル (MBM) と確率論的普及モデル (SDM) を用いて，1999 年 3 月〜2008 年 12 月まで四半期毎のブロードバンド (BB) 契約数と，1979 年から 2006 年までの 28 年間の年末における移動体通信 (MC) 契約数のデータを解析する．すべてのデータポイントを同等に扱うために，どのデータも誤差が 10%あるとして解析し，MBM と SDM のベストフィットを比較する．

BB 契約数の推移に対しては，MBM で解析した結果は，$\mu = 1$, $a = 390.8$, $\xi = 6.581$, $r = 1.241$ のとき，$\chi^2_{min}/n.d.f. = 45.53/(40-3) = 1.23$ であった．また SDM では，予め $r_0 = r_2 = r$ とおいて解析を行った．$\mu = 1.1$, $a = 0.00$, $b_0 = 9.90$, $a_2 = 10.83$, $\nu = 2.60$, $r = 0.586$ のときに $\chi^2_{min}/n.d.f. = 36.99/(40-6) = 1.09$ となり，修正 Bass モデルよりもよい結果を得た．図 1 (左) にその結果を示す．図中の $\langle n_0\rangle$ は革新者の寄与を表す．図 1(右) に縦軸を対数目盛にとったグラフを示す．

図 1: BB サービス契約数の SDM による解析結果

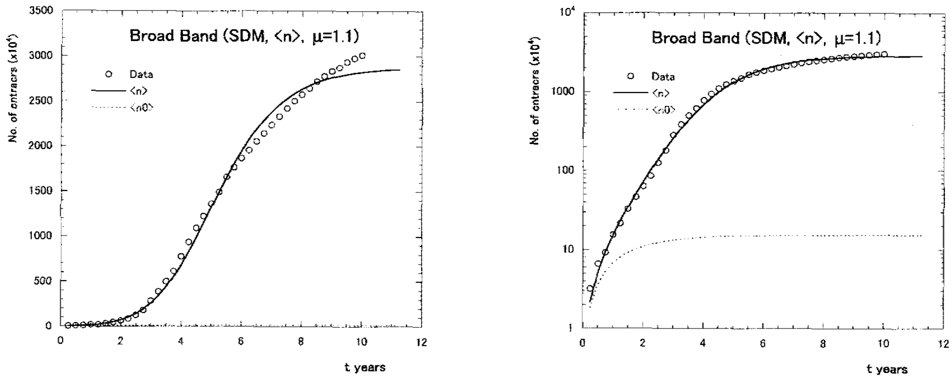
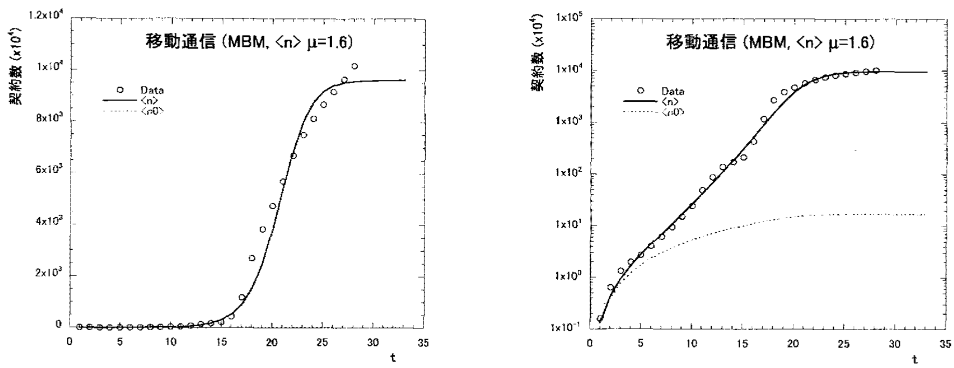


図 2: 移動体通信契約数の MBM による解析結果



移動体通信のデータに対しては，MBM では，$\mu = 1.6$, $a = 4.775\times10^3$, $\xi = 2.013$, $r = 0.0667$ のとき，$\chi^2_{min}/n.d.f. = 107.13/(28-4) = 4.46$ であった (図 2 参照)．SDM で解析した結果は．$\mu = 1.6$, $a = 1121$, $b_0 = 246.0$, $a_2 = 79378$, $\nu = 0.743$, $r = 0.0885$ のときに $\chi^2_{min}/n.d.f. = 99.267/(28-6) = 4.51$ となり，修正 Bass モデルの結果を改善することはできなかった．

参考文献

[1] Everett M. Rogers, *Diffusion of Innovations*, 3rd ed.,(1983), New York: The Free Press.

[2] F. M. Bass, A New Product Growth Model for Consumer Durables, Management Science, 15, 215(1969).

[3] F. M. Bass, T. V. Krishnan and D. C. Jain, Why the Bass Model Fits without Decision Variables, Marketing Science,Vol.13, 203(1994).

[4] D. G. Kendall, On the generalized birth-and-death process, Ann. Math. Statist., 19, 1(1948).

[5] 鈴木尚通，成耆政，葛西和宏，田中正敏，消費者の購買行動における意志決定とその理論的応用，松本大学研究紀要第 6 号, 45(2008).

[6] N. Suzuki, M. Tanaka, K. Kasai and K.J. Sung, A stochastic approach to diffusion model with asymmetric influence, Proceeding of the third world conference on production and operation management -POM TOKYO 2008-, 2727(2008).